

חשבון אינפיניטסימלי ב



תוכן העניינים

1.	אינטגרלים מיידיים	1
2.	אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"	6
3.	אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים	8
4.	אינטגרלים בשיטת ההצבה	12
5.	אינטגרלים של פונקציות רציונליות	15
6.	אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות	20
7.	שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)	31
8.	שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)	53
9.	משוואות מסדר ראשון	58
10.	שימושים של משוואות דיפרנציאליות	64

חשבון אינפיניטסימלי ב

פרק 1 - אינטגרלים מידיים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים 1
2. מציאת פונקציה קדומה 4

אינטגרלים מידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

$$\int 4dx \quad (1) \quad \int x^4 dx \quad (2) \quad \int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4) \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \quad \int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7) \quad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \quad \int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \quad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \quad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$)

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13) \quad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \quad \int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16) \quad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \quad \int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19) \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \quad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \quad \int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \quad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \quad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

$$(\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx : \text{חשבו את האינטגרל} \quad (30)$$

$$(\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

תשובות סופיות

- $$4x + c \quad (1)$$
- $$\frac{x^5}{5} + c \quad (2)$$
- $$-\frac{1}{x} + c \quad (3)$$
- $$\frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$
- $$-\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5)$$
- $$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6)$$
- $$\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$
- $$-\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8)$$
- $$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9)$$
- $$\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$
- $$-\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11)$$
- $$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12)$$
- $$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15)$$
- $$\frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14)$$
- $$\frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$
- $$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17)$$
- $$\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$
- $$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19)$$
- $$-\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$
- $$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$
- $$\frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21)$$
- $$\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$
- $$x + \ln|x+2| + c \quad (25)$$
- $$\frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24)$$
- $$x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$
- $$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28)$$
- $$\frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27)$$
- $$4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$
- $$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (30)$$
- $$8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$
- $$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33)$$
- $$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32)$$
- $$\frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

- (1) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2, 3)$.
מצאו את הפונקציה.
- (2) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 4$.
מצאו את הפונקציה.
- (3) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -6$.
מצאו את הפונקציה.
- (4) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - 6$.
ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצאו את הפונקציה.
- (5) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.
שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y = 5\frac{2}{3}$, הוא 3.
מצאו את הפונקציה.
- (6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x + 6$.
שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,
וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
מצאו את הפונקציה.
- (7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$.
המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y = -4$.
מצאו את הפונקציה.

(8) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = 0$,
ונתון בנוסף כי לכל x_0 ממשי: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$.

- א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.
 ב. חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.
 ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.
 חשבו את הנגזרת $(G(x) - f(x))'$.

תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12 \frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12 \frac{1}{2} \sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3} (x-1)^3 - 18 \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

- (8) א. רציפה לכל x . ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.
 ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$. ה. 0.

חשבון אינפיניטסימלי ב

פרק 2 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים.....6

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1) x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24) \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|--|--|--|
| $\frac{1}{3} \ln x^3 + 1 + c$ (3) | $\ln \sin x + c$ (2) | $\ln x^2 + 1 + c$ (1) |
| $e^2 \ln e^x + 1 + c$ (6) | $\ln \ln x + c$ (5) | $-\ln \cos x + c$ (4) |
| $-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c$ (9) | $e^{\tan x} + c$ (8) | $e^{x^2} + c$ (7) |
| $\sin(\ln x) + c$ (12) | $\sin(\sin x) + c$ (11) | $\sin(2x^2 + 1) + c$ (10) |
| $-2 \cos(\sqrt{x}) + c$ (15) | $-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + c$ (14) | $\frac{1}{40} \sin(10x^4 + 1) + c$ (13) |
| $\frac{1}{2} (\tan x)^2 + c$ (18) | $\frac{1}{2} (\arctan x)^2 + c$ (17) | $\frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$ (16) |
| $\frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c$ (21) | $\sqrt{2 \sin x} + c$ (20) | $2\sqrt{x^2 + 1} + c$ (19) |
| $\frac{2}{3} (\arctan x)^{\frac{3}{2}} + c$ (24) | $\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$ (23) | $\frac{2}{9} (x^3 + 4)^{\frac{3}{2}} + c$ (22) |

חשבון אינפיניטסימלי ב

פרק 3 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים 8

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6) \qquad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9) \qquad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15) \qquad \int x \arctan x dx \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18) \qquad \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21) \qquad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23) \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

$$(24) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int x^n e^x dx \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(25) \text{ חשבו את } \int x^4 e^x dx.$$

$$(26) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int \cos^n x dx \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(27) \text{ חשבו את } \int \cos^4 x dx.$$

(28) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ כאשר n טבעי.

(29) חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

(30) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ כאשר n טבעי.

(31) חשבו את $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

(32) חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \cos bxdx$, $\int e^{ax} \sin bxdx$.

תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln |x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left(-\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right\} \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bxdx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

חשבון אינפיניטסימלי ב

פרק 4 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה 12

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c \quad (23)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (24)$$

חשבון אינפיניטסימלי ב

פרק 5 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית..... 15
2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית..... 17
3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית..... 18

אינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan \left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x - 1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x + 4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x - 1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x - 1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x - 2| + \frac{1}{4} \ln|x + 2| + c \quad (5)$$

אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}}$$
 (1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$$
 (2)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx$$
 (3)

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx$$
 (4)

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$
 (5)

$$\int \sqrt{1+e^x} dx$$
 (6)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$
 (7)

תשובות סופיות

$$-1.5 \ln \left| 1 - \sqrt[3]{x}^2 \right| + c \quad (1)$$

$$6 \left(\frac{(1 + \sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[6]{x})}{2} + 3(1 + \sqrt[6]{x}) - \ln |1 + \sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (2)$$

$$4 \left(\frac{(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1 + \sqrt[4]{x-1}) - \ln |1 + \sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln |\sqrt[3]{x} + 1| - \frac{1}{2} \ln \left((\sqrt[3]{x} - 0.5)^2 + 0.75 \right) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad (4)$$

$$-\ln |1 + e^x| + x + c \quad (5)$$

$$2\sqrt{1 + e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} \right| + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right| + c \quad (7)$$

נוסחאות

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

חשבון אינפיניטסימלי ב

פרק 6 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא (ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות 20
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות 22
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית 23
5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים 24
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות 27

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכרו כי:

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + c$
$\int \cot x dx = \ln \sin x + c$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

- (1) $\int \left(\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx$
- (2) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$
- (3) $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$
- (4) $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$
- (5) $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$
- (6) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$
- (7) $\int \sin x \cos x \cos 2x dx$
- (8) $\int \tan^2 x dx$
- (9) $\int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2}$
- (10) $\int \sin 7x \cos 5x dx$
- (11) $\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx$
- (12) $\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$
- (13) $\int \cos^2 x dx$
- (14) $\int \sin^2 4x dx$
- (15) $\int \cos^3 x dx$
- (16) $\int \sin^3 4x dx$
- (17) $\int \cos^4 x dx$
- (18) $\int \sin^4 4x dx$
- (19) $\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx$
- (20) $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx$
- (21) $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx$
- (22) $\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx$
- (23) $\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx$
- (24) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

תשובות סופיות

- $$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\cos 2x - 12\sin \frac{x}{3} + c \quad (1) \\ & -10\cot 10x + c \quad (3) \\ & \frac{1}{2}\sin 2x + c \quad (5) \\ & -\frac{1}{16}\cos 4x + c \quad (7) \\ & \tan x - \cot x + c \quad (9) \\ & \sin x + c \quad (11) \\ & \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13) \\ & \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + c \quad (15) \\ & \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c \quad (17) \\ & -\cot x - x + c \quad (19) \\ & \ln|\cos x| + c \quad (21) \\ & 3x + \frac{1}{2}\sin 2x - 2\sin x + c \quad (23) \\ & \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{24}\sin 6x\right) + c \quad (24) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} & \frac{1}{4}\tan 4x + c \quad (2) \\ & \frac{1}{2}\sin 2x + c \quad (4) \\ & x - \frac{1}{2}\cos 2x + c \quad (6) \\ & \tan x - x + c \quad (8) \\ & \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + c \quad (10) \\ & \frac{3}{4}x + \frac{1}{16}\sin 4x + c \quad (12) \\ & \frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14) \\ & -\frac{3}{16}\cos 4x + \frac{1}{48}\cos 12x + c \quad (16) \\ & \frac{3}{8}x - \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{128}\sin 16x + c \quad (18) \\ & 2\sin x + c \quad (20) \\ & -\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + c \quad (22) \end{aligned}$$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \int f(t) dt \quad \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ x = \arcsin t \end{array} \right.$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \int f(t) (-dt) \quad \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ x = \arccos t \end{array} \right.$$

זכרו כי :

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2)$$

$$\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (3)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6)$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5)$$

$$\int \tan^5 x dx \quad (8)$$

$$\int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12)$$

$$\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c \quad (2)$$

$$\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c \quad (4)$$

$$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c \quad (3)$$

$$-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c \quad (5)$$

$$\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c \quad (8)$$

$$\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (12)$$

$$-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c \quad (11)$$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad \left| \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ x = 2 \arctan t \end{array} \right|$$

זכרו כי :

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2)$$

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} + c \quad (1)$$

$$\ln \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c \quad (2)$$

$$-x + 2 \left(\frac{2}{3\sqrt{1/3}} \arctan \left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}} \right) \right) + c \quad (3)$$

הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\begin{aligned} \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt) \\ \int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right) \\ \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right) \end{aligned}$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \quad (2)$$

$$\int \sqrt{4x^2 - 1} dx \quad (3)$$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 2x - 3} dx \quad (6)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{(4 + x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{4} \cot\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \right| + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \left[\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \right] + c \quad (3)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + c \quad (4)$$

$$2 \left\{ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin \frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (5)$$

$$\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} + c \quad (6)$$

$$\frac{9}{2} \left\{ \arcsin \frac{x+3}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin \frac{x+3}{3}\right) \right\} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{16} \left\{ \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arctan \frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} \right\} \quad (10)$$

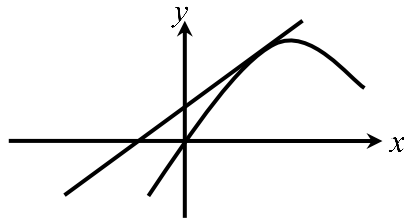
$$\ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c \quad (11)$$

חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = x + 2 \sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

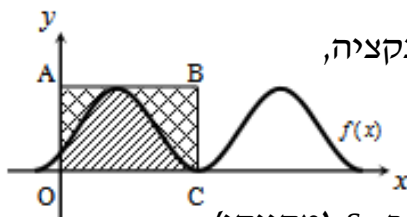


א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x , ברביע הראשון והשני.

(2) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$,

בתחום $-0.25\pi \leq x \leq 1.75\pi$.



נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון, המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .

א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

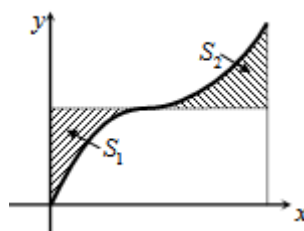
(3) באיור שלהלן נתונה הפונקציה $y = \sin x + x$, בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

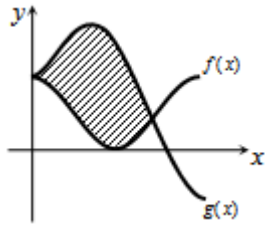
א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x בנקודה שבה $x = 2\pi$,

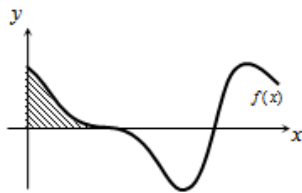
ונעביר ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.

הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט, S_1 ו- S_2 , שווים.

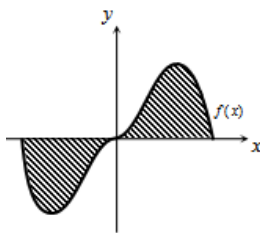




- 4 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \cos^2 x$ ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
 א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
 השתמשו בזהות $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.



- 5 הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$.
 א. מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות המקיימות $f'(x) = 0$ בתחום $0 < x < 2\pi$.
 ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x) = 0$, אשר אינה קיצון, נמצאת על ציר ה- x .
 ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.
 ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



- 6 נתונה הפונקציה $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$.
 א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא $y' = x^2 \sin x$.
 באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 \sin x$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
 ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x בתחום הנתון.

- 7 נתונה הפונקציה $f(x) = a \cos x + b \sin x$, כאשר a, b פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$,

והיא חיובית בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2} - 2$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות

- (1) א. $y = x + 2$ ב. π יח"ש.
- (1) א. $y = 1$ ב. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$
- (2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π, π) היא נקודת פיתול.
ב. $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$
- (3) א. $(0, 1), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$ ב. $S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$
- (4) א. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.
- (5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$
- (6) $b = -2, a = 2$

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

חשבון אינפיניטסימלי ב

פרק 7 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

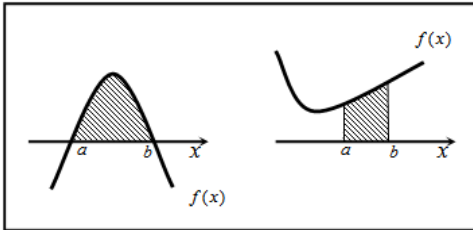
תוכן העניינים

31	1. חישוב שטחים
51	2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y
52	3. אורך קשת

חישוב שטחים

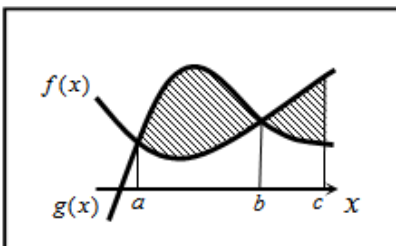
חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

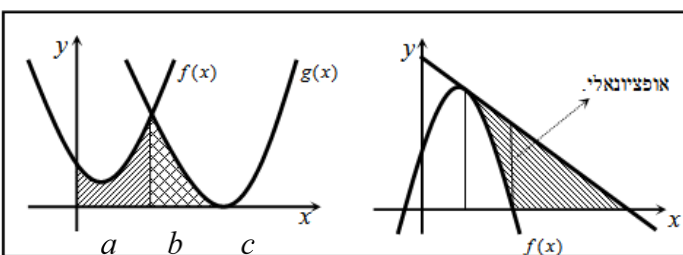


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

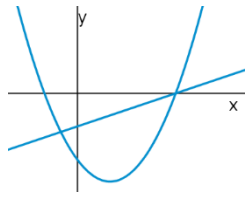
$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :

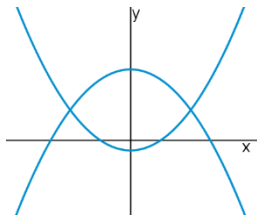


$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

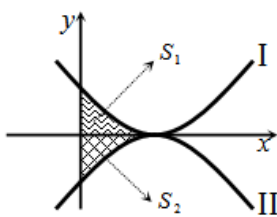
שאלות



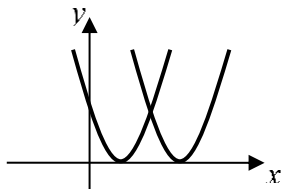
- (1) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 4x - 12$ ו- $g(x) = x - 6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



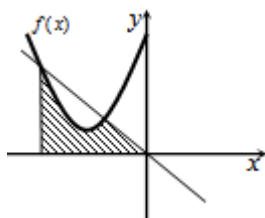
- (2) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



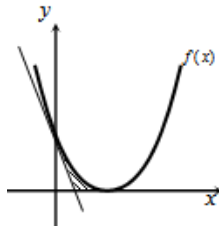
- (3) נתונות הפונקציות $f(x) = (x-2)^2$ ו- $g(x) = -(x-2)^2$,
כמתואר באיור.
א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.
ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
ב- S_1 ו- S_2 , כמתואר באיור.
הראו כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.



- (4) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x .



- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 6x + 12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
בנקודה שבה $x = -4$, כמתואר באיור.
א. מצאו את משוואת הישר.
ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.
ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = -4$.



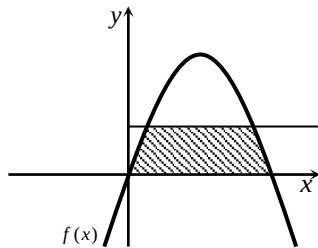
6 נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$.

בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y נעביר משיק.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).



7 נתונה הפונקציה $f(x) = kx - x^2$.

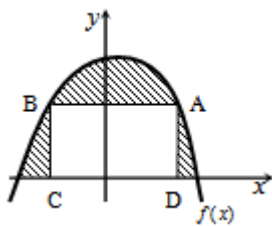
הישר $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות אלה הוא $x = 9$.

א. מצאו את ערך הפרמטר k .

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).



8 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארת באיור שלהלן,

היא $f'(x) = 3 - 2x$. ישר AB , שמשוואתו $y = 6$

חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו- B .

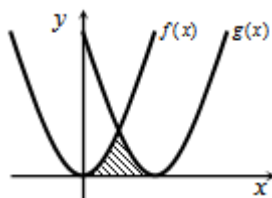
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x ,

כך שנוצר מלבן $ABCD$.

ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא $x = 4$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x (השטח המסומן).



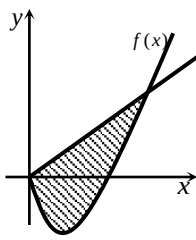
9 באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x) = x^2$

את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה שבה $x = 2$.

הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x) = 2x - 8$.

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (השטח המסומן).



10 באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 2x$.

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = 2x - 6$,

וידוע כי הישר חותך את הפונקציה

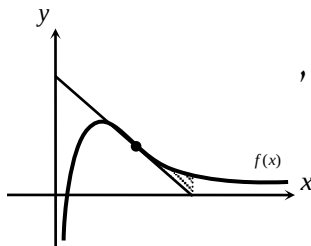
בנקודה שבה ערך ה- y הוא $y = 16$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

11 ענו על הסעיפים הבאים:



א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$,

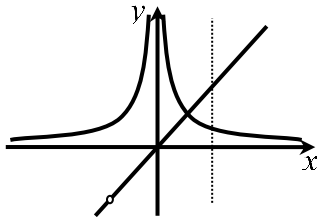
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה

והמשיק שמצאת בסעיף א'.

חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- x ,

היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

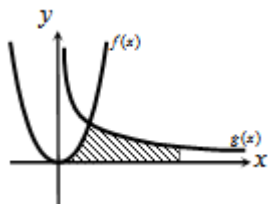


12 נתונות שתי פונקציות $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר $x = 2$ וציר ה- x .

13 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות



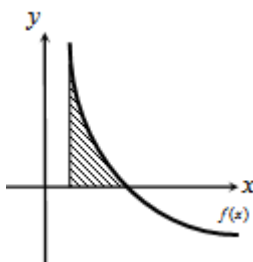
$f(x) = 2x^2$ ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$ (קבוע, $a > 0$), בתחום $x > 0$.

ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,

בנקודה הנמצאת על הישר $y = 4x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a .

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $x = 4$.



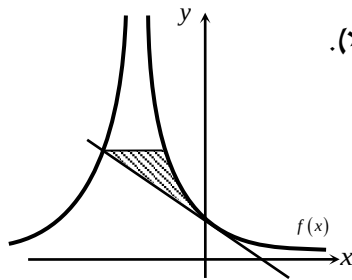
14 גרף הפונקציה $f(x) = \frac{a - x^2}{x^2}$ (a קבוע)

חותך את ציר ה- x בנקודה $(6, 0)$.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והישר $x = 2$.



15 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$ (A פרמטר חיובי).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם

ציר ה-y, הוא $-\frac{1}{9}$.

א. מצאו את ערך הפרמטר A.

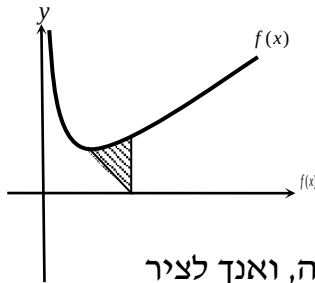
ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה-y.

ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -4.5$.

ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף

הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).



16 באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$.

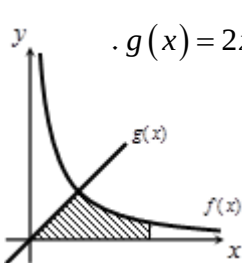
א. מצאו את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר

ישר לנקודה $(2, 0)$, שעל ציר ה-x.

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר

ה-x, היוצא מהנקודה $(2, 0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.



17 באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = 2x - 1$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

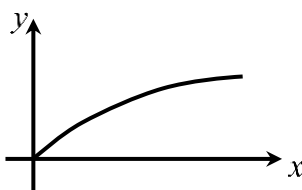
ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים,

ציר ה-x והישר $x = 9$.

18 נתונה הפונקציה $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת

המינימום שלה וציר ה-y.



19 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

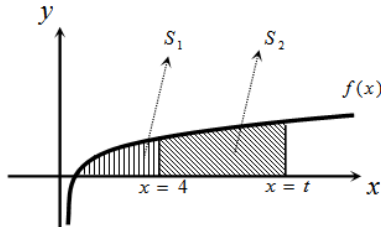
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

המשיק והישר $x = \sqrt{3}$.

(20) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני אנכים לציר ה- x , $x = 4$ ו- $x = t$ (כאשר $t > 4$).
נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x ב- S_1 ,
ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנכים ב- S_2 .

ידוע כי $8S_1 = S_2$.
מצאו את t .



(21) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענו על הסעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא $m = \frac{17}{16}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

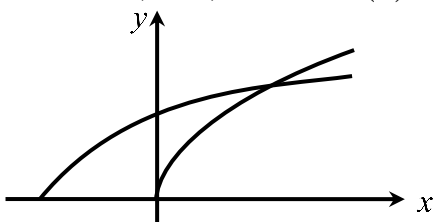
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

(22) נתונות שתי פונקציות $f(x) = \sqrt{x+b}$, $g(x) = \sqrt{2x}$ (כאשר $b > 0$).

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה- x הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר b .



(23) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$.

ברביע הראשון.

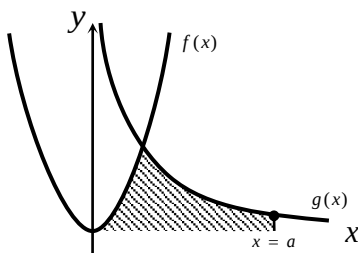
נעביר ישר $x = a$, החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה- x והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $85\frac{1}{3}$.

מצאו את a .



(24) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני ישרים $x = k$ ו- $x = t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

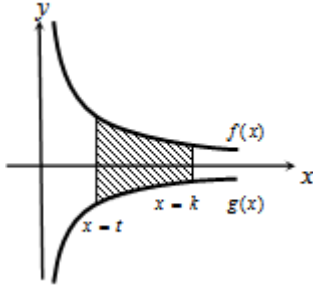
ידוע כי $AB = 2CD$.

א. הראו כי $k = 4t$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות

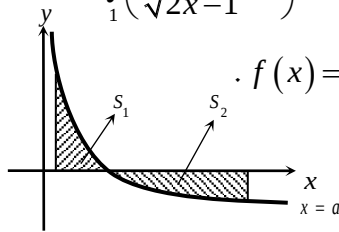
לבין הישרים $x = k$ ו- $x = t$, הוא $S = 12$.

מצאו את t .



(25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של a , $a > 1$, יתקיים $\int_1^a \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$.



ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$.

נעביר שני אנכים לציר ה- x , $x = 1$ ו- $x = 13$,

כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2 .

מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

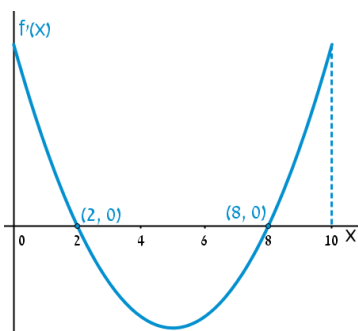
ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והאנך $x = 1$, כלומר את S_1 .

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו לכמה שווה השטח S_2 .

נמקו.



(26) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

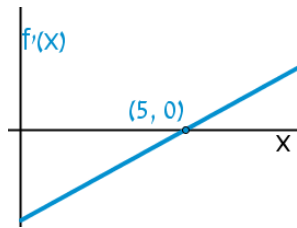
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

אם $f(5) = 0$, $f(0) = -4$, $f(2) = 6$,

וכן $f(10) > 0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים

ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x = 2$.



(27) להלן גרף הפונקציה $f'(x)$, אשר חותך את

ציר ה- x בנקודה אחת בלבד, $(5, 0)$.

א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית,

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y

שלה הוא $y = -2$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- y כאשר $y = 8$.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.

(28) באיור שלהלן מתוארת הנגזרת $f'(x)$.

א. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

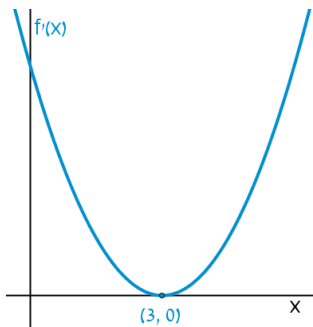
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

אם ידוע כי $f(3) = 4$, וכי היא חותכת את

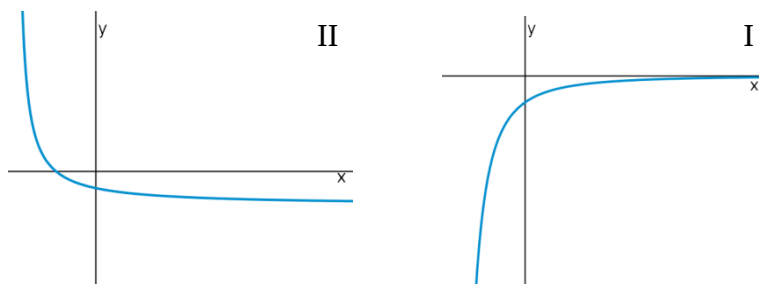
ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.



(29) באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:

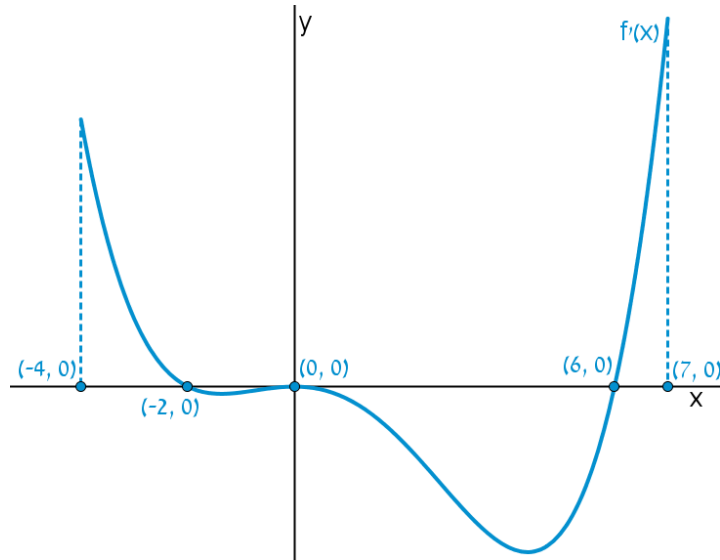


א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון $f(10) = -3$, וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$.

מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

30 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:

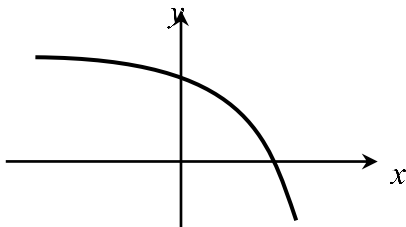


- א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 7$,
 לפי הנתונים $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.
 ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מיידיים של פונקציות מעריכיות

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



(31) נתונה הפונקציה $f(x) = 5 - e^x$.

העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין
הפונקציה, המשיק וציר ה- x .
ניתן להשאיר e ו- $\ln$ בתשובה.

(32) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{bx}$, כאשר $b > 0$.

גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים

וציר ה- y הוא $\frac{e-2}{4}$.

מצאו את ערכו של הפרמטר b .

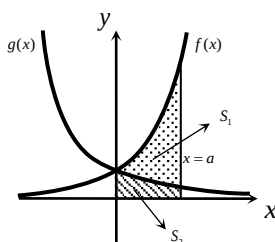
(33) נתונות הפונקציות $f(x) = e^{-x}$ ו- $g(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.

מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני

הצירים. המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$,

ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- x , כך שנוצר מלבן.

הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.



(34) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות

$f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$.

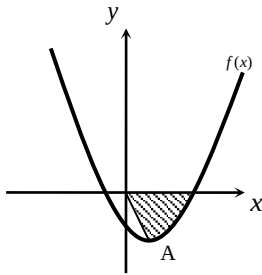
נעביר אנך לציר ה- x את הישר $x=a$,

כאשר $a > 0$, כמתואר באיור.

אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2 .

ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2 .

מצאו את a .



(35) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$.

הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

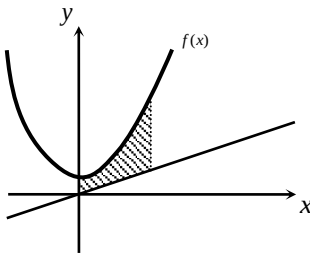
ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה

A עם הראשית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

הישר וציר ה-x, אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה-x בנקודה שבה $x = 1.7$.



(36) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $\left(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2}\right)$.

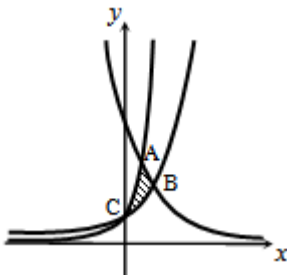
א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$,

והישר $y = 0.1x$.

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה-y

והאנך $x = 2$.



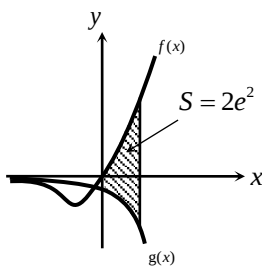
(37) באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

$$1. f(x) = 2^x \quad 2. g(x) = 4^x \quad 3. h(x) = 2^{4-2x}$$

א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).

ג. חשבו את השטח המסומן באיור.



(38) ענו על הסעיפים הבאים:

א. גזרו את הפונקציה $y = e^x(x-1)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של

הפונקציות $f(x) = xe^x$ ו- $g(x) = -e^x$.

נעביר ישר $x = a$, כאשר $a > 0$, החותך את

הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את

השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה-y והישר (מקווקו).

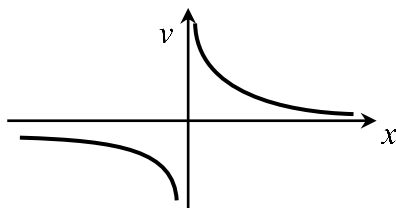
ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.

מצאו את a.

פונקציות לוגריתמיות

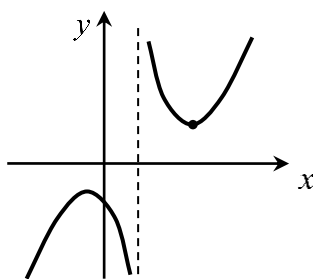
אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$



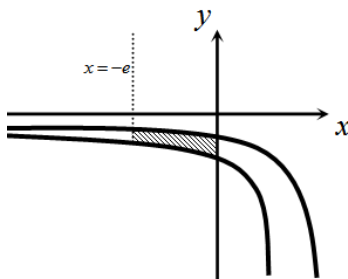
(39) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = -1$ ו- $x = -4$ וציר ה- x . ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.



(40) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 2$, ואנך לציר ה- x העובר בנקודת המינימום שלה. אפשר להשאיר ביטוי עם $\ln$ בתשובה.

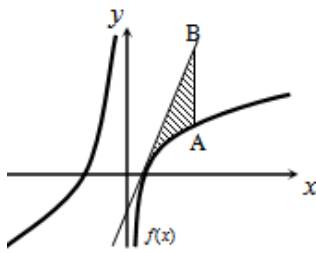


(41) באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{a}{x-1}$

ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x < 0$.

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 3$.

א. מצאו את a וכתבו את שתי הפונקציות.
ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.

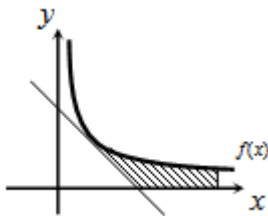


(42) נתונה הפונקציה $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$.

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x היא $y = 18x - 9$.
א. מצאו את a ו- b וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה- y , שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

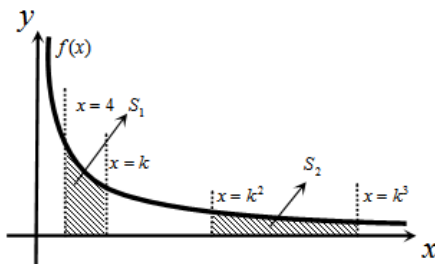
- ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



(43) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 2$ היא $y = 4 - x$.
א. מצאו את $f(x)$.

- ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x > 0$.
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x = e^2$.



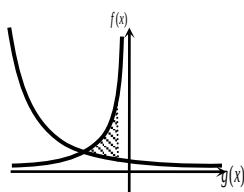
(44) באיור שלהלן נתונה הפונקציה

$f(x) = \frac{2}{x}$, בתחום $x > 0$.

נעביר את הישרים $x = k$, $x = k^2$, $x = k^3$ ו- $x = 4$ (כמתואר באיור $x > 4$).

א. הביעו באמצעות k את השטחים S_1 ו- S_2 .

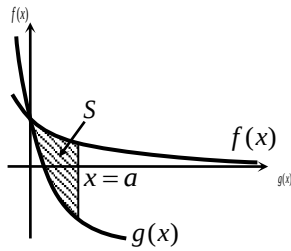
- ב. הראו כי ההפרש $S_2 - S_1$ אינו תלוי ב- k , וחשבו את ערכו.
ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1 . מצאו את k .



(45) נתונות הפונקציות $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.

גרף $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 0.4$.
א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

- ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.
ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x = -1$.



(46) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
 $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$ ו- $g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$,
 בתחום $x \geq 0$.

א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y .

ב. נעביר ישר $x = a$ ($a > 1$), המאונך

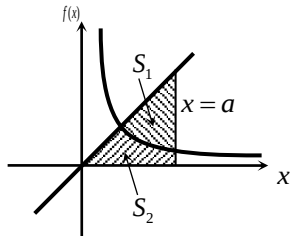
לציר ה- x , חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).

מצאו את ערכו של a , עבורו מתקיים $S = 4$.

(47) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x) = \frac{2}{3x-1}$ והישר $y = x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.



נעביר אנך לציר ה- x , $x = a$, הנמצא מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים

S_1 ו- S_2 , המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של a , עבורו השטח S_2

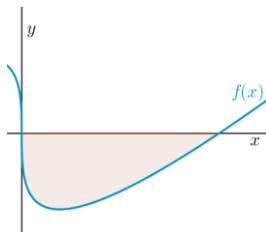
יהיה שווה ל- $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$.

ג. עבור ערך ה- a שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\frac{S_1}{S_2}$.

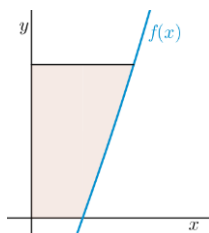
פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרלים מיידיים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n} \neq -1$.(48) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$.א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

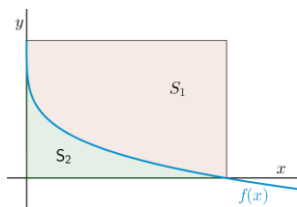
ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

(49) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

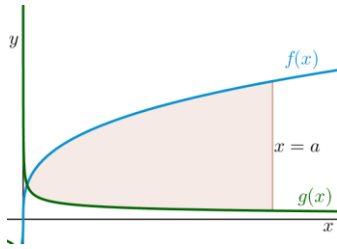
ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .ג. נעביר אנך לציר ה- y מהנקודה $(4, 6)$.

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.

(50) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$.

נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן,

ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- S_1 ,ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2 .מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.



51) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x} \text{ ו- } g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

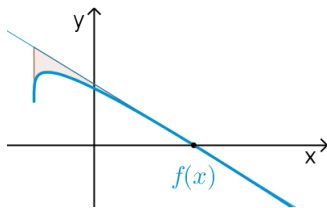
א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים

בתחום $x > 0$.

ב. נעביר אנך לציר ה- x , $x = a$ (פרמטר).
ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים,
מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך,

$$\text{הוא } 42\frac{3}{16} \text{ יח"ש.}$$

מצאו את a .



52) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$, פרמטר a .

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה
שבה $x = 2$.

א. מצאו את הפרמטר a וכתבו את הפונקציה.

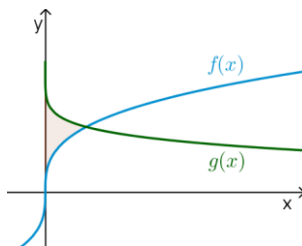
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך
שלה עם ציר ה- x .

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף
הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה
שמצאנו בסעיף ג'.

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.



53) באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ ו- } g(x) = 2 - \sqrt[6]{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים
וציר ה- y .

$$54) \text{ הנגזרת של } f(x) \text{ היא } f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$$

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x

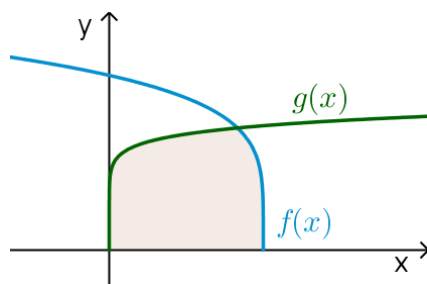
בנקודה שבה $x = 1.2$.

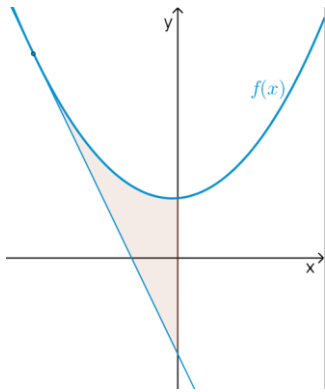
א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף

הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה

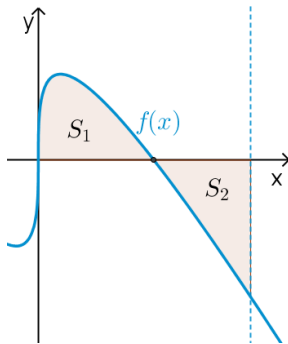
$$g(x) = \sqrt[10]{x} \text{ וציר ה- } x.$$





55) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$.

- מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -3$.
- חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .



56) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$.

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 . נעביר ישר $x = k$, אשר יוצר את השטח S_2 , כמתואר באיור. מצאו את k , אם ידוע כי $S_1 = S_2$.

תשובות סופיות

- (1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (3) א. $g(x) = \Pi$, $f(x) = I$ ב. שאלת הוכחה.
- (4) $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (5) א. $y = -x$ ב. $(-3, 3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.
- (6) א. $y = -4x + 4$ ב. $(1, 0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (7) א. $k = 10$ ב. $(1, 9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (8) א. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (9) א. $g(x) = (x - 4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (10) א. $f(x) = x^2 - 6x$ ב. $(0, 0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (11) א. $y = -x + 2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.
- (12) 1 יח"ש.
- (13) א. $a = 32$, $(2, 8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (14) א. $a = 36$, $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.
- (15) א. $A = 6$ ב. $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$ ג. הוכחה. ד. $\left(-1.5, \frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.
- (16) א. $\min(0.5, 1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.
- (17) א. $(4, 8)$ ב. 48 יח"ש.
- (18) 2.26 יח"ש.
- (19) 0.5 יח"ש.
- (20) $t = 16$
- (21) א. i. $x > 0$ ii. $(4, 0)$ iii. $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$ ב. $(16, 14)$ ג. 88 יח"ש.
- (22) $b = 2$
- (23) $a = 9$

- (24) א. שאלת הוכחה. ב. $t=1$.
- (25) א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=|-S_1|=2$.
- (26) ב. 10 יח"ש.
- (27) א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$ ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$ ג. $\min(5,-2)$ ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.
- (28) א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפנייה ואחריה. ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש.
- (29) א. $f(x): \Pi, f'(x): I$ ב. 1 יח"ש.
- (30) א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (31) $S=0.192$ יח"ש.
- (32) $b=2$
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) $a=\ln 2$
- (35) א. $A(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=4.744$ יח"ש.
- (36) א. $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}, a=-2$ ב. 1.52
- (37) א. $A(1,4), B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right), C(0,1)$ ב. $S=1.03$ יח"ש.
- (38) א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$
- (39) $S=\ln 4$ יח"ש.
- (40) $S=4\ln 2-2$ יח"ש.
- (41) א. $f(x)=\frac{2}{x-1}, g(x)=\frac{1}{x-2}, a=2$ ב. $S=1.76$ יח"ש.
- (42) א. $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}, a=2, b=-4$ ב. $x=2$ ג. $S=6+\ln 256 \approx 11.54$ יח"ש.
- (43) א. $f(x)=\frac{4}{x}$ ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.
- (44) א. $S_1=2\ln k-\ln 16, S_2=2\ln k$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$
- (45) א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=\ln 5\frac{1}{3} \approx 1.674$ יח"ש.
- (46) ב. $a=2$
- (47) א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\frac{S_1}{S_2}=5.955$
- (48) א. $(0,0), (8,0)$ ב. $S=16$ יח"ש.
- (49) א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. $S=18.149$ יח"ש.

$$\frac{S_1}{S_2} = 4 \quad (50)$$

$$a = 8 \quad \text{ב.} \quad \left(\frac{1}{8}, 2\right) \quad \text{א.} \quad (51)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, a=1 \quad \text{א.} \quad (52) \quad \text{ב.} \quad x \geq -1.2 \quad \text{ג.} \quad (-1.2, 1.2)$$

$$y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16} \quad \text{ד.} \quad \text{ה.} \quad S = 4.56 \quad \text{יח"ש.} \quad (53)$$

$$S = \frac{11}{28} \quad \text{יח"ש.} \quad \text{ב.} \quad (1, 1) \quad (54)$$

$$f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א.} \quad S = 1\frac{5}{66} \quad \text{יח"ש.} \quad \text{ב.} \quad (55)$$

$$y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א.} \quad S = 4.56 \quad \text{יח"ש.} \quad \text{ב.} \quad (56)$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296.. \quad \text{ג.} \quad (0, 0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \text{כל } x \quad (56)$$

חישוב שטחים ביחס לציר ה- y

שאלות

(1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.

(2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $y = x - 8$.

תשובות סופיות

(1) $20\frac{5}{6}$

(2) $20\frac{5}{6}$

אורך קשת

שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(1 \leq x \leq 8), y = x^{2/3} \quad (2)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3)$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5)$$

$$(1 \leq x \leq 8), x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6)$$

$$(0 \leq y \leq 4), x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \ln x \quad (8)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = x^2 \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{1097}{480} \quad (3)$$

$$21 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}3^{1.5} \right\} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

$$\frac{8}{243} \{ 82^{1.5} - 1 \} \quad (7)$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad (8)$$

$$\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17}+4) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5}+2) \quad (\text{Decimal: } 3.16784) \quad (9)$$

חשבון אינפיניטסימלי ב

פרק 8 - שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)

תוכן העניינים

- 1. חישוב נפח גוף-סיבוב..... 53
- 2. חישוב שטח מעטפת גוף-סיבוב..... 56
- 3. חישוב נפח גוף כללי..... 57

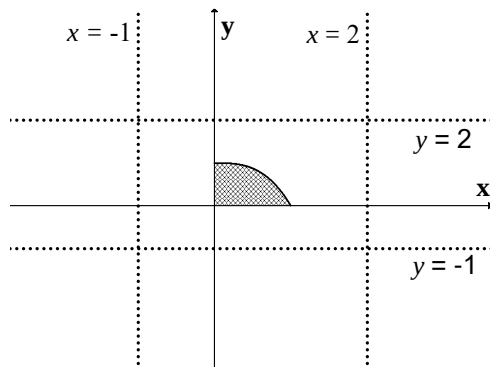
חישוב נפח גוף-סיבוב

שאלות

- (1) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = 2x$ מסתובב סביב ציר ה- x .
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:
א. שיטת הדיסקות (cavalieri).
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

- (2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = 2x$ מסתובב סביב ציר ה- y .
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:
א. שיטת הדיסקות (cavalieri).
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = 1 - x^3$ והצירים, מסתובב סביב ציר כלשהו. מצאו את נפח הגוף המתקבל בכל מקרה בשאלות 3-8:

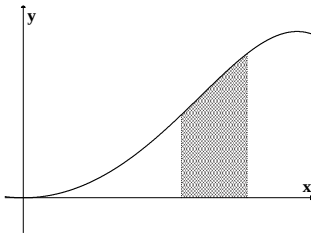


- (3) ציר ה- x .
(4) הישר $y = -1$.
(5) הישר $y = 2$.
(6) ציר ה- y .
(7) הישר $x = -1$.
(8) הישר $x = 2$.

(9) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

(10) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

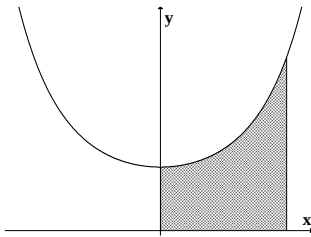
(11) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח כדור.



12 השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = \sin(x^2)$

והישרים $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$, $y = 0$

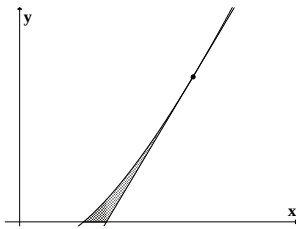
מסתובב סביב ציר ה- y .
מהו נפח הגוף המתקבל?



13 השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = e^{x^2}$

והישרים $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

מסתובב סביב ציר ה- y .
מהו נפח הגוף המתקבל?



14 השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = x \ln x$

המשיק לגרף בנקודה (e, e) וציר ה- x ,

מסתובב סביב ציר ה- x .
מהו נפח הגוף המתקבל?

15 השטח הכלוא בין הגרפים של $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x + 8$, $x = 0$

מסתובב סביב הישר $x = 4$.

מצאו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } \frac{64}{15}\pi \quad \text{ב. } \frac{64}{15}\pi$$

$$(2) \quad \text{א. } \frac{8}{3}\pi \quad \text{ב. } \frac{8}{3}\pi$$

$$(3) \quad \frac{9\pi}{14}$$

$$(4) \quad \frac{15\pi}{7}$$

$$(5) \quad \frac{33\pi}{14}$$

$$(6) \quad \frac{3\pi}{5}$$

$$(7) \quad 2.1\pi$$

$$(8) \quad \frac{12\pi}{5}$$

$$(9) \quad V = \pi R^2 \cdot H$$

$$(10) \quad V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3}$$

$$(11) \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$(12) \quad \frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1)$$

$$(13) \quad \pi(e-1)$$

$$(14) \quad \frac{e^3-4}{54}\pi$$

$$(15) \quad 128\pi$$

חישוב שטח מעטפת של גוף-סיבוב

שאלות

- (1) הפונקציה $y = \sqrt{4-x^2}$, עבור $-1 \leq x \leq 1$, מסתובבת סביב ציר ה- x . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?
- (2) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של חרוט.
- (3) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של כדור.
- (4) הפונקציה $x = \sqrt{9-y^2}$, עבור $-2 \leq y \leq 2$, מסתובבת סביב ציר ה- y . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

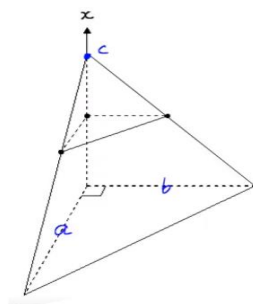
תשובות סופיות

- (1) 8π
- (2) $S = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$
- (3) $S = 4\pi R^2$
- (4) 24π

חישוב נפח גוף כללי

שאלות

- (1) מצאו נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו a .



- (2) חשבו את נפחה של פירמידה, שבסיסה הוא משולש ישר זווית (ראו איור).

תשובות סופיות

$$V = \frac{a^2 h}{3} \quad (1)$$

$$\frac{abc}{6} \quad (2)$$

חשבון אינפיניטסימלי ב

פרק 9 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים 58
3. משוואה לינארית מסדר ראשון 60
4. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון 62

הפרדת משתנים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2)=1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x| - c}, \quad y = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3 y' + (2 - 3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2 z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) \left[x^2 - 4x + C \right] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} \left[-5e^{\cos x} + C \right] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x \left[-\cot x + C \right] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2 (y + c) \quad (9)$$

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

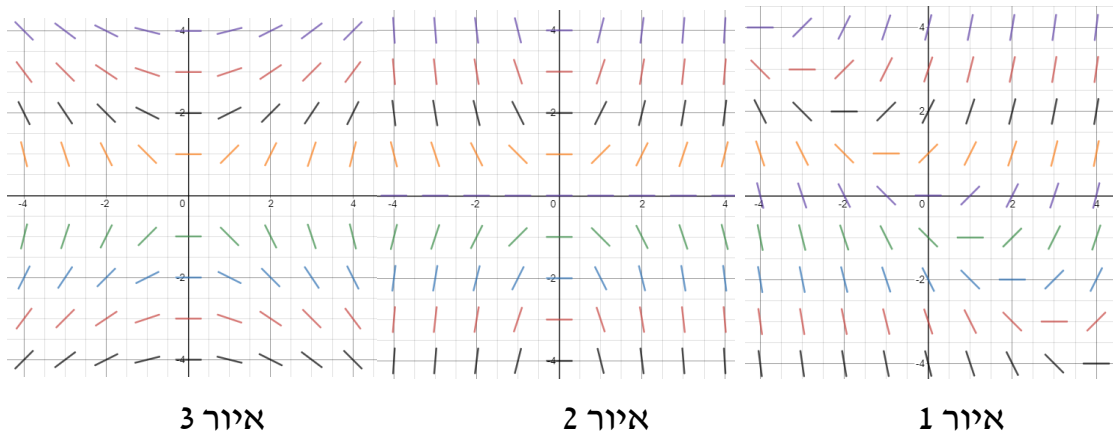
(1) שרטטו שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y' = 2y - x$.

(2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

א. $y' = \frac{x}{y}$

ב. $y' = xy$

ג. $y' = x + y$



(3) נתונה המד"ר $y' = y - x$, $y(0) = 2$.

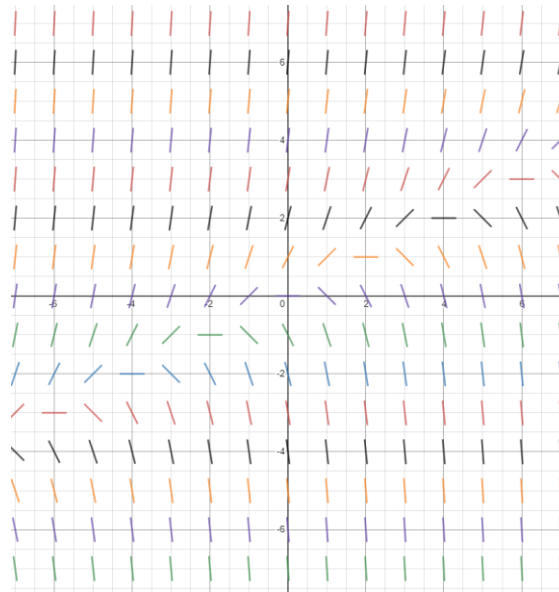
מצאו בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.1$.

(4) נתונה המד"ר $y' = x + y$, $y(1) = 2$.

מצאו בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.2$.

תשובות סופיות

(1)



(2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

(3) $y(1) = 4.593$

(4) $y(2) = 6.95328$

חשבון אינפיניטסימלי ב

פרק 10 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

תוכן העניינים

- 1. בעיות גדילה ודעיכה.....64
- 2. בעיות בגיאומטריה אנליטית.....66

בעיות גדילה ודעיכה

שאלות

- (1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה.
 ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.
 א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?
 ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?
 ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?
 *הניחו שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שבכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).
- (2) האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית.
 בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים,
 ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.
 א. מצאו את אחוז הגידול השנתי.
 ב. מצאו כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת),
 היו בעיר 550 אלף תושבים.
- (3) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית של 4%.
 כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש"ח.
 א. כמה כסף הפקיד האדם?
 ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7,000 ש"ח?
- (4) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית.
 בספירה הראשונית היו 1,000 חיות.
 בספירה השנייה שנעשתה, כעבור 20 חודשים, היו 1,400 חיות בר.
 מצאו אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה,
 היו בשמורה 2,000 חיות בר.
- (5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים.
 ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד,
 פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.
 א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1,000 שנים,
 מכמות התחלתית של 100 גרם?
 ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם,
 מכמות התחלתית של 100 גרם?

- 6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע.
 בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.
 א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?
 ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

תשובות סופיות

- | | | |
|---------------------|------------------|----------------|
| 1) א. 7.28 מיליארד. | ב. 3.54 מיליארד. | ג. בשנת 2,106. |
| 2) א. 2% | ב. 15.92 שנים. | |
| 3) א. 4093.65 ₪. | ב. 13.41 שנים. | |
| 4) 40.77 חודשים. | | |
| 5) א. 88.69 גרם. | ב. 19,188 שנים. | |
| 6) א. 3.04 שבועות. | ב. 14.6 שבועות. | |

בעיות גיאומטריות

שאלות

- (1) על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה (x, y) על העקום, שווה ל- $-\frac{x}{y}$. מצאו את משוואת העקום.
- (2) תרגמו את התיאור המילולי הבא למשוואה דיפרנציאלית ופתרו אותה: נתון עקום ברביע הראשון, העובר בנקודה $(2, 4)$. נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה $A(x, y)$ שעליו, ובין שיפוע הישר המחבר את A עם ראשית הצירים, שווה לשיעור ה- y של הנקודה A .
- (3) מצאו את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה $(3, 4)$, אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

תשובות סופיות

- (1) $x^2 + y^2 = k$
- (2) $y = 2xe^{x-2}$
- (3) $y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2}$